

# Polylinear Mapping of Free Algebra

Aleks Kleyn

ABSTRACT. In this paper I consider the structure of the polylinear mapping of the free algebra over the commutative ring.

## CONTENTS

1. Algebra over Ring . . . . .	1
2. Tensor Product of Algebras . . . . .	5
3. Linear Mapping into Associative Algebra . . . . .	8
4. Linear Mapping into Nonassociative Algebra . . . . .	9
5. Polylinear Mapping into Associative Algebra . . . . .	10
6. Polylinear Map into Free Finite Dimensional Associative Algebra . . .	15
7. References . . . . .	17
8. Index . . . . .	18
9. Special Symbols and Notations . . . . .	19

## 1. ALGEBRA OVER RING

**Definition 1.1.** Let  $D$  be commutative ring. Let  $A$  be module over ring  $D$ .<sup>1</sup> For given bilinear mapping

$$f : A \times A \rightarrow A$$

we define product in  $A$

$$(1.1) \quad ab = f \circ (a, b)$$

$A$  is a **algebra over ring**  $D$  if  $A$  is  $D$ -module and we defined product (1.1) in  $A$ . If  $A$  is free  $D$ -module, then  $A$  is called **free algebra over ring**  $D$ .  $\square$

---

[Aleks\\_Kleyn@MailAPS.org](mailto:Aleks_Kleyn@MailAPS.org).  
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>.  
[http://arxiv.org/a/kleyn\\_a\\_1](http://arxiv.org/a/kleyn_a_1).  
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>.

<sup>1</sup>This subsection is written on the base of the section [4]-2.2.

Let  $\bar{e}$  be the basis of free algebra  $A$  over ring  $D$ . If algebra  $A$  has unit, then we assume that  $\bar{e}_0$  is the unit of algebra  $A$ .

**Theorem 1.2.** *Let  $\bar{e}$  be the basis of free algebra  $A$  over ring  $D$ . Let*

$$a = a^i e_i \quad b = b^j e_j \quad a, b \in A$$

*We can get the product of  $a, b$  according to rule*

$$(1.2) \quad (ab)^k = C_{ij}^k a^i b^j$$

*where  $C_{ij}^k$  are structural constants of algebra  $A$  over ring  $D$ . The product of basis vectors in the algebra  $A$  is defined according to rule*

$$(1.3) \quad \bar{e}_i \bar{e}_j = C_{ij}^k \bar{e}_k$$

*Proof.* The equation (1.3) is corollary of the statement that  $\bar{e}$  is the basis of the algebra  $A$ . Since the product in the algebra is a bilinear mapping, than we can write the product of  $a$  and  $b$  as

$$(1.4) \quad ab = a^i b^j e_i e_j$$

From equations (1.3), (1.4), it follows that

$$(1.5) \quad ab = a^i b^j C_{ij}^k \bar{e}_k$$

Since  $\bar{e}$  is a basis of the algebra  $A$ , than the equation (1.2) follows from the equation (1.5).  $\square$

**Definition 1.3.** Let  $A_1$  and  $A_2$  be algebras over ring  $D$ . The linear mapping<sup>2</sup>

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

of the  $D$ -module  $A_1$  into the  $D$ -module  $A_2$  is called **linear mapping of  $D$ -algebra  $A_1$  into  $D$ -algebra  $A_2$** . Let us denote  $\mathcal{L}(A_1; A_2)$  set of linear mappings of algebra  $A_1$  into algebra  $A_2$ .  $\square$

**Definition 1.4.** Let  $D$  be the commutative associative ring. Let  $A_1, \dots, A_n$  be  $D$ -algebras and  $S$  be  $D$ -module. We call map

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

**polylinear mapping of algebras  $A_1, \dots, A_n$  into module  $S$** , if

$$f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$1 \leq i \leq n \quad a_i, b_i \in A_i \quad p \in D$$

Let us denote  $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; S)$  set of polylinear mappings of algebras  $A_1, \dots, A_n$  into module  $S$ . Let us denote  $\mathcal{L}(A^n; S)$  set of  $n$ -linear mappings of algebra  $A$  ( $A_1 = \dots = A_n = A$ ) into module  $S$ .  $\square$

**Theorem 1.5.** *Let  $D$  be the commutative associative ring. Let  $A_1, \dots, A_n$  be  $D$ -algebras and  $S$  be  $D$ -module. Let mappings*

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

$$g : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

---

<sup>2</sup>This subsection is written on the base of the section [4]-2.3.

be polylinear mappings. Then mapping  $f + g$  defined by equation

$$(f + g) \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_n) + g \circ (a_1, \dots, a_n)$$

is polylinear.

*Proof.* Statement of theorem follows from chains of equations

$$\begin{aligned} & (f + g) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= f \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\ &+ g \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\ &= (f + g) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + (f + g) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\ &= (f + g) \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) \\ &= f \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) \\ &= pf \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + pg \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &= p(f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \\ &= p(f + g) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

**Corollary 1.6.** Consider algebra  $A_1$  and algebra  $A_2$ . Let mappings

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

$$g : A_1 \rightarrow A_2$$

be linear mappings. Then mapping  $f + g$  defined by equation

$$(f + g) \circ a = f \circ a + g \circ a$$

is linear.

□

**Theorem 1.7.** Let  $D$  be the commutative associative ring. Let  $A_1, \dots, A_n$  be  $D$ -algebras and  $S$  be  $D$ -module. Let mapping

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

be polylinear mapping. Then mapping  $pf, p \in D$ , defined by equation

$$(pf) \circ x = p \circ f \circ x$$

is polylinear. This holds

$$p(qf) = (pq)f$$

$$(p + q)f = pf + qf$$

*Proof.* Statement of theorem follows from chains of equations

$$\begin{aligned}
(pf) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) &= p \, f \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\
&= p \, (f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)) \\
&= p \, f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + p \, f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\
&= (pf) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + (pf) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\
(pf) \circ (x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n) &= p \, f \circ (x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n) = pq \, f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&= qp \, f \circ (x_1, \dots, x_n) = q \, (pf) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
(p(qf)) \circ (x_1, \dots, x_n) &= p \, (qf) \circ (x_1, \dots, x_n) = p \, (q \, f \circ (x_1, \dots, x_n)) \\
&= (pq) \, f \circ (x_1, \dots, x_n) = ((pq)f) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
((p+q)f) \circ (x_1, \dots, x_n) &= (p+q) \, f \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= p \, f \circ (x_1, \dots, x_n) + q \, f \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= (pf) \circ (x_1, \dots, x_n) + (qf) \circ (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

□

**Corollary 1.8.** Consider algebra  $A_1$  and algebra  $A_2$ . Let mapping

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

be linear mapping. Then mapping  $pf$ ,  $p \in D$ , defined by equation

$$(pf) \circ x = p \, f \circ x$$

is linear. This holds

$$\begin{aligned}
p(qf) &= (pq)f \\
(p+q)f &= pf + qf
\end{aligned}$$

□

**Theorem 1.9.** Let  $D$  be the commutative associative ring. Let  $A_1, \dots, A_n$  be  $D$ -algebras and  $S$  be  $D$ -module. The set  $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; S)$  is a  $D$ -module.

*Proof.* The theorem 1.5 determines the sum of polylinear mappings into  $D$ -module  $S$ . Let  $f, g, h \in \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; S)$ . For any  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$ ,

$$\begin{aligned}
(f+g) \circ a &= f \circ a + g \circ a = g \circ a + f \circ a \\
&= (g+f) \circ a \\
((f+g)+h) \circ a &= (f+g) \circ a + h \circ a = (f \circ a + g \circ a) + h \circ a \\
&= f \circ a + (g \circ a + h \circ a) = f \circ a + (g+h) \circ a \\
&= (f+(g+h)) \circ a
\end{aligned}$$

Therefore, sum of polylinear mappings is commutative and associative.

The mapping  $z$  defined by equation

$$z \circ a = 0$$

is zero of addition, because

$$(z+f) \circ a = z \circ a + f \circ a = 0 + f \circ a = f \circ a$$

For a given mapping  $f$  a mapping  $g$  defined by equation

$$g \circ a = -f \circ a$$

satisfies to equation

$$f + g = z$$

because

$$(f + g) \circ a = f \circ a + g \circ a = f \circ a - f \circ a = 0$$

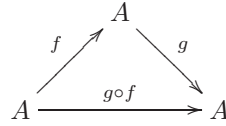
Therefore, the set  $\mathcal{L}(A_1; A_2)$  is an Abelian group.

From the theorem 1.7, it follows that the representation of the ring  $D$  in the Abelian group  $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; S)$  is defined. Since the ring  $D$  has unit, than, according to the theorem [4]-2.1.1, specified representation is effective.  $\square$

**Corollary 1.10.** *Let  $D$  be commutative ring with unit. Consider  $D$ -algebra  $A_1$  and  $D$ -algebra  $A_2$ . The set  $\mathcal{L}(A_1; A_2)$  is an  $D$ -module.*  $\square$

**Theorem 1.11.** *Let  $A$  be algebra over commutative ring  $D$ . Module  $\mathcal{L}(A; A)$  equipped by product*

$$(1.6) \quad \circ : (g, f) \in \mathcal{L}(A; A) \times \mathcal{L}(A; A) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(A; A)$$



is algebra over  $D$ .

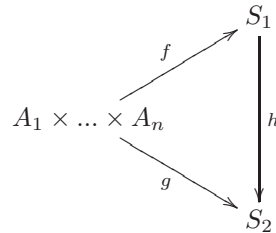
*Proof.* See the proof of the theorem [4]-2.4.5.  $\square$

## 2. TENSOR PRODUCT OF ALGEBRAS

**Definition 2.1.** Let  $A_1, \dots, A_n$  be free algebras over commutative ring  $D$ .<sup>3</sup> Let us consider category  $\mathcal{A}$  whose objects are polylinear over commutative ring  $D$  mappings

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow S_1 \quad g : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow S_2$$

where  $S_1, S_2$  are modules over ring  $D$ . We define morphism  $f \rightarrow g$  to be linear over commutative ring  $D$  mapping  $h : S_1 \rightarrow S_2$  making diagram



commutative. Universal object  $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$  of category  $\mathcal{A}$  is called **tensor product of algebras**  $A_1, \dots, A_n$ .  $\square$

**Definition 2.2.** Tensor product

$$A^{\otimes n} = A_1 \otimes \dots \otimes A_n \quad A_1 = \dots = A_n = A$$

is called **tensor power of algebra**  $A$ .  $\square$

---

<sup>3</sup>I give definition of tensor product of algebras following to definition in [1], p. 601 - 603. This subsection is written on the base of the section [4]-2.5.

**Theorem 2.3.** *There exists tensor product of algebras.*

*Proof.* Let  $M$  be module over ring  $D$  generated by product  $A_1 \times \dots \times A_n$  of algebras  $A_1, \dots, A_n$ . Injection

$$i : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow M$$

is defined according to rule

$$(2.1) \quad i \circ (d_1, \dots, d_n) = (d_1, \dots, d_n)$$

Let  $N \subset M$  be submodule generated by elements of the following type

$$(2.2) \quad (d_1, \dots, d_i + c_i, \dots, d_n) - (d_1, \dots, d_i, \dots, d_n) - (d_1, \dots, c_i, \dots, d_n)$$

$$(2.3) \quad (d_1, \dots, ad_i, \dots, d_n) - a(d_1, \dots, d_i, \dots, d_n)$$

where  $d_i \in A_i$ ,  $c_i \in A_i$ ,  $a \in D$ . Let

$$j : M \rightarrow M/N$$

be canonical map on factor module. Consider commutative diagram

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccc} & & M/N \\ & \nearrow f & \\ A_1 \times \dots \times A_n & \xrightarrow{i} & M \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \searrow j \end{array}$$

Since elements (2.2) and (2.3) belong to kernel of linear map  $j$ , then, from equation (2.1), it follows

$$(2.5) \quad f \circ (d_1, \dots, d_i + c_i, \dots, d_n) = f \circ (d_1, \dots, d_i, \dots, d_n) + f \circ (d_1, \dots, c_i, \dots, d_n)$$

$$(2.6) \quad f \circ (d_1, \dots, ad_i, \dots, d_n) = a f \circ (d_1, \dots, d_i, \dots, d_n)$$

From equations (2.5) and (2.6) it follows that map  $f$  is polylinear over ring  $D$ . Since  $M$  is module with basis  $A_1 \times \dots \times A_n$ , then, according to theorem [1]-4.1 on p. 135, for any module  $V$  and any polylinear over  $D$  map

$$g : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow V$$

there exists a unique homomorphism  $k : M \rightarrow V$ , for which following diagram is commutative

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccc} A_1 \times \dots \times A_n & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow g & \downarrow k \\ & & V \end{array}$$

Since  $g$  is polylinear over  $D$ , then  $\ker k \subseteq N$ . According to statement on p. [1]-119, map  $j$  is universal in the category of homomorphisms of vector space  $M$  whose kernel contains  $N$ . Therefore, we have homomorphism

$$h : M/N \rightarrow V$$

which makes the following diagram commutative

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccc} & M/N & \\ & \downarrow h & \\ M & \xrightarrow{j} & M/N \\ & \searrow k & \\ & V & \end{array}$$

We join diagrams (2.4), (2.7), (2.8), and get commutative diagram

$$(2.9) \quad \begin{array}{ccccc} & & & M/N & \\ & & f & \nearrow & \\ A_1 \times \dots \times A_n & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{j} & M/N \\ & \searrow g & \searrow k & \searrow & \downarrow h \\ & & V & & \end{array}$$

Since  $\text{Im} f$  generates  $M/N$ , than map  $h$  is uniquely determined.  $\square$

According to proof of theorem 2.3

$$A_1 \otimes \dots \otimes A_n = M/N$$

If  $d_i \in A_i$ , we write

$$(2.10) \quad j \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

**Theorem 2.4.** Let  $A_1, \dots, A_n$  be algebras over commutative ring  $D$ . Let

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

be polylinear mapping defined by equation

$$(2.11) \quad f \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

Let

$$g : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow V$$

be polylinear mapping into  $D$ -module  $V$ . There exists an  $D$ -linear mapping

$$h : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \rightarrow V$$

such that the diagram

$$(2.12) \quad \begin{array}{ccc} & A_1 \otimes \dots \otimes A_n & \\ & \downarrow h & \\ A_1 \times \dots \times A_n & \xrightarrow{f} & A_1 \otimes \dots \otimes A_n \\ & \searrow g & \\ & V & \end{array}$$

is commutative.

*Proof.* Equation (2.11) follows from equations (2.1) and (2.10). An existence of the mapping  $h$  follows from the definition 2.1 and constructions made in the proof of the theorem 2.3.  $\square$

We can write equations (2.5) and (2.6) as

$$(2.13) \quad \begin{aligned} & a_1 \otimes \dots \otimes (a_i + b_i) \otimes \dots \otimes a_n \\ &= a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n + a_1 \otimes \dots \otimes b_i \otimes \dots \otimes a_n \end{aligned}$$

$$(2.14) \quad \begin{aligned} & a_1 \otimes \dots \otimes (ca_i) \otimes \dots \otimes a_n = c(a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n) \\ & a_i \in A_i \quad b_i \in A_i \quad c \in D \end{aligned}$$

**Theorem 2.5.** *Let  $A$  be algebra over commutative ring  $D$ . There exists a linear mapping*

$$h : a \otimes b \in A \otimes A \rightarrow ab \in A$$

*Proof.* The theorem is corollary of the theorem 2.4 and the definition 1.1.  $\square$

**Theorem 2.6.** *Tensor product  $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$  of free finite dimensional algebras  $A_1, \dots, A_n$  over the commutative ring  $D$  is free finite dimensional algebra.*

*Let  $\bar{e}_i$  be the basis of algebra  $A_i$  over ring  $D$ . We can represent any tensor  $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$  in the following form*

$$(2.15) \quad a = a^{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{n \cdot i_n}$$

*Expression  $a^{i_1 \dots i_n}$  is called **standard component of tensor**.*

*Proof.* See the proof of the theorem [4]-2.5.6.  $\square$

### 3. LINEAR MAPPING INTO ASSOCIATIVE ALGEBRA

**Theorem 3.1.** *Consider  $D$ -algebras  $A_1$  and  $A_2$ . For given mapping  $f \in \mathcal{L}(A_1; A_2)$ , there exists linear mapping*

$$h : A_2 \otimes A_2 \rightarrow \mathcal{L}(A_1; A_2)$$

*defined by the equation*

$$(3.1) \quad (a \otimes b) \circ f = afb$$

*Proof.* See the proof of the theorems [4]-2.6.1 and [4]-2.6.2.  $\square$

**Theorem 3.2.** *Consider  $D$ -algebras  $A_1$  and  $A_2$ . Let us define product in algebra  $A_2 \otimes A_2$  according to rule*

$$(3.2) \quad (c \otimes d) \circ (a \otimes b) = (ca) \otimes (bd)$$

*A linear mapping*

$$(3.3) \quad h : A_2 \otimes A_2 \rightarrow {}^* \mathcal{L}(A_1; A_2)$$

*defined by the equation*

$$(3.4) \quad (a \otimes b) \circ f = afb \quad a, b \in A_2 \quad f \in \mathcal{L}(A_1; A_2)$$

*is representation<sup>4</sup> of algebra  $A_2 \otimes A_2$  in module  $\mathcal{L}(A_1; A_2)$ .*

*Proof.* See the proof of the theorem [4]-2.6.3.  $\square$

---

<sup>4</sup>See the definition of representation of  $\Omega$ -algebra in the definition [3]-2.1.4.



**Theorem 3.3.** Consider  $D$ -algebra  $A$ . Let us define product in algebra  $A \otimes A$  according to rule (3.2). A representation of algebra  $A \otimes A$

$$(3.5) \quad h : A \otimes A \rightarrow {}^*\mathcal{L}(A; A)$$

in module  $\mathcal{L}(A; A)$  defined by the equation

$$(3.6) \quad (a \otimes b) \circ f = afb \quad a, b \in A \quad f \in \mathcal{L}(A; A)$$

allows us to identify tensor  $d \in A \otimes A$  and mapping  $d \circ \delta \in \mathcal{L}(A; A)$  where  $\delta \in \mathcal{L}(A; A)$  is identity mapping.

*Proof.* See the proof of the theorem [4]-2.6.4.  $\square$

From the theorem 3.3, it follows that we can consider the mapping (3.4) as the product of mappings  $a \otimes b$  and  $f$ .

**Theorem 3.4.** Consider  $D$ -algebra  $A_1$  and associative  $D$ -algebra  $A_2$ . Consider the representation of algebra  $A_2 \otimes A_2$  in the module  $\mathcal{L}(A_1; A_2)$ . The mapping

$$h : A_1 \rightarrow A_2$$

generated by the mapping

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

has form

$$(3.7) \quad h = (a_{s \cdot 0} \otimes a_{s \cdot 1}) \circ f = a_{s \cdot 0} f a_{s \cdot 1}$$

*Proof.* See the proof of the theorem [4]-2.6.6  $\square$

**Theorem 3.5.** Let  $A$  be free finite dimensional associative algebra over the field  $D$ . The representation of algebra  $A \otimes A$  in algebra  $\mathcal{L}(A; A)$  has finite basis  $\bar{I}$ .

(1) The linear mapping  $f \in \mathcal{L}(A; A)$  has form

$$(3.8) \quad f = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} \otimes a_{k \cdot s_k \cdot 1}) \circ I_k = \sum_{\mathbf{k}} a_{k \cdot s_k \cdot 0} I_k a_{k \cdot s_k \cdot 1}$$

(2) Its standard representation has form

$$(3.9) \quad f = a^{k \cdot ij} (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \circ I_k = a^{k \cdot ij} \bar{e}_i I_k \bar{e}_j$$

*Proof.* See the proof of the theorem [4]-2.7.5  $\square$

#### 4. LINEAR MAPPING INTO NONASSOCIATIVE ALGEBRA

Since the product is nonassociative, we may assume that action of  $a, b \in A$  over the mapping  $f$  may have form either  $a(fb)$ , or  $(af)b$ .

**Theorem 4.1.** Let  $\bar{e}_1$  be basis of the free finite dimensional  $D$ -algebra  $A_1$ . Let  $\bar{e}_2$  be basis of the free finite dimensional nonassociative  $D$ -algebra  $A_2$ . Let  $C_{2 \cdot kl}^p$  be structural constants of algebra  $A_2$ . Let the mapping

$$(4.1) \quad g = a \circ f$$

generated by the mapping  $f \in (A_1; A_2)$  through the tensor  $a \in A_2 \otimes A_2$ , has the standard representation

$$(4.2) \quad g = a^{ij} (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \circ f = a^{ij} (\bar{e}_i f) \bar{e}_j$$

Coordinates of the mapping (4.1) and its standard components are connected by the equation

$$(4.3) \quad g_l^k = f_l^m g^{ij} C_{2 \cdot im}^p C_{2 \cdot pj}^k$$

*Proof.* See the proof of the theorem [4]-2.8.3  $\square$

**Theorem 4.2.** Let  $A$  be free finite dimensional nonassociative algebra over the ring  $D$ . The representation of algebra  $A \otimes A$  in algebra  $\mathcal{L}(A; A)$  has finite basis  $\bar{I}$ .

(1) The linear mapping  $f \in \mathcal{L}(A; A)$  has form

$$(4.4) \quad f = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} \otimes a_{k \cdot s_k \cdot 1}) \circ I_k = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} I_k) a_{k \cdot s_k \cdot 1}$$

(2) Its standard representation has form

$$(4.5) \quad f = a^{k \cdot ij} (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \circ I_k = a^{k \cdot ij} (\bar{e}_i I_k) \bar{e}_j$$

*Proof.* See the proof of the theorem [4]-2.8.4  $\square$

## 5. POLYLINEAR MAPPING INTO ASSOCIATIVE ALGEBRA

**Theorem 5.1.** Let  $A_1, \dots, A_n, A$  be associative  $D$ -algebras. Let

$$f_i \in \mathcal{L}(A_i; A) \quad i = 1, \dots, n$$

$$a_j \in A \quad j = 0, \dots, n$$

For given transposition  $\sigma$  of  $n$  variables, the mapping

$$(5.1) \quad \begin{aligned} & ((a_0, \dots, a_n) \circ \sigma(f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \end{aligned}$$

is  $n$ -linear mapping into algebra  $A$ .

*Proof.* The statement of theorem follows from chains of equations

$$\begin{aligned} & ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ (x_i + y_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i + f_i \circ y_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &+ a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ y_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &+ ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\ &= ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, p x_i, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ (p x_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(p(f_i \circ x_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\ &= p(((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

$\square$

In the equation (5.1), as well as in other expressions of polylinear mapping, we have convention that mapping  $f_i$  has variable  $x_i$  as argument.

**Theorem 5.2.** Let  $A_1, \dots, A_n, A$  be associative  $D$ -algebras. For given set of mappings

$$f_i \in \mathcal{L}(A_i; A) \quad i = 1, \dots, n$$

the mapping

$$h : A^{n+1} \rightarrow \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$$

defined by equation

$$(a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) = a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n$$

is  $n + 1$ -linear mapping into  $D$ -module  $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$ .

*Proof.* The statement of theorem follows from chains of equations

$$\begin{aligned} & ((a_0, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots (a_i + b_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n + a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots b_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= ((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &+ ((a_0, \dots, b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= ((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) + (a_0, \dots, b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= ((a_0, \dots, pa_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots pa_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\ &= p(((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n)) \\ &= (p((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n))) \circ (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

**Theorem 5.3.** Let  $A_1, \dots, A_n, A$  be associative  $D$ -algebras. For given set of mappings

$$f_i \in \mathcal{L}(A_i; A) \quad i = 1, \dots, n$$

there exists linear mapping

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$$

defined by the equation

$$\begin{aligned} (5.2) \quad & (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) = (a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n \end{aligned}$$

*Proof.* The statement of the theorem is corollary of theorems 2.4, 5.2. □

**Theorem 5.4.** Let  $A_1, \dots, A_n, A$  be associative  $D$ -algebras. For given tensor  $a \in A^{\otimes n+1}$  and given transposition  $\sigma \in S_n$  the mapping

$$h : \prod_{i=1}^n \mathcal{L}(A_i; A) \rightarrow \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$$

defined by equation

$$(a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) = a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n$$

is  $n$ -linear mapping into  $D$ -module  $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$ .

*Proof.* The statement of theorem follows from chains of equations

$$\begin{aligned}
& ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i + g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(f_i + g_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma((f_i + g_i) \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i + g_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&+ a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(g_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(f_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&+ (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(g_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&+ ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \\
&+ ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, p f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(p f_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma((p f_i) \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(p(f_i \circ x_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\
&= p(((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n)) \\
&= (p((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n))) \circ (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

□

**Theorem 5.5.** Let  $A_1, \dots, A_n, A$  be associative  $D$ -algebras. For given tensor  $a \in A^{\otimes n+1}$  and given transposition  $\sigma \in S_n$  there exists linear mapping

$$h : \mathcal{L}(A_1; A) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}(A_n; A) \rightarrow \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$$

defined by the equation

$$(5.3) \quad (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)$$

*Proof.* The statement of the theorem is corollary of theorems 2.4, 5.4. □

**Theorem 5.6.** Let  $A$  be associative  $D$ -algebra. Polylinear map

$$(5.4) \quad f : A^n \rightarrow A, a = f \circ (a_1, \dots, a_n)$$

has form

$$(5.5) \quad a = f_{s \cdot 0}^n \sigma_s(I_{1 \cdot s} \circ a_1) f_{s \cdot 1}^n \dots \sigma_s(I_{n \cdot s} \circ a_n) f_{s \cdot n}^n$$

where  $\sigma_s$  is a transposition of set of variables  $\{a_1, \dots, a_n\}$

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \sigma_s(a_1) & \dots & \sigma_s(a_n) \end{pmatrix}$$

*Proof.* We prove statement by induction on  $n$ .

When  $n = 1$  the statement of theorem is corollary of the statement (1) of the theorem 3.5. In such case we may identify<sup>5</sup>

$$f_{s \cdot p}^1 = f_{s \cdot p} \quad p = 0, 1$$

Let statement of theorem be true for  $n = k - 1$ . Then it is possible to represent mapping (5.4) as

$$\begin{array}{ccc} A^k & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow g \circ a_k & \uparrow h \\ & & A^{k-1} \end{array}$$

$$a = f \circ (a_1, \dots, a_k) = (g \circ a_k) \circ (a_1, \dots, a_{k-1})$$

According to statement of induction polylinear mapping  $h$  has form

$$a = h_{t,0}^{k-1} \sigma_t(I_{1,t} \circ a_1) h_{t,1}^{k-1} \dots \sigma_t(I_{k-1,t} \circ a_{k-1}) h_{t,k-1}^{k-1}$$

According to construction  $h = g \circ a_k$ . Therefore, expressions  $h_{t,p}$  are functions of  $a_k$ . Since  $g \circ a_k$  is linear mapping of  $a_k$ , then only one expression  $h_{t,p}$  is linear mapping of  $a_k$ , and rest expressions  $h_{t,q}$  do not depend on  $a_k$ .

Without loss of generality, assume  $p = 0$ . According to the equation (3.7) for given  $t$

$$h_{t,0}^{k-1} = g_{tr,0} I_{k,r} \circ a_k g_{tr,1}$$

Assume  $s = tr$ . Let us define transposition  $\sigma_s$  according to rule

$$\sigma_s = \sigma_{tr} = \begin{pmatrix} a_k & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ a_k & \sigma_t(a_1) & \dots & \sigma_t(a_{k-1}) \end{pmatrix}$$

Suppose

$$\begin{aligned} f_{tr,q+1}^k &= h_{t,q}^{k-1} & q = 1, \dots, k-1 \\ f_{tr,q}^k &= g_{tr,q} & q = 0, 1 \end{aligned}$$

We proved step of induction. □

**Definition 5.7.** Expression  $f_{s \cdot p}^n$  in equation (5.5) is called **component of polylinear map**  $f$ . □

**Theorem 5.8.** Consider  $D$ -algebras  $A$ . A linear mapping

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow {}^* \mathcal{L}(A^n; A)$$

defined by the equation

$$(5.6) \quad \begin{aligned} (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n) &= a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n \\ a_0, \dots, a_n &\in A \quad \sigma \in S_n \quad f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(A_n; A) \end{aligned}$$

<sup>5</sup>In representation (5.5) we will use following rules.

- If range of any index is set consisting of one element, then we will omit corresponding index.
- If  $n = 1$ , then  $\sigma_s$  is identical transformation. We will not show such transformation in the expression.

is representation<sup>6</sup> of algebra  $A^{\otimes n+1} \times S^n$  in  $D$ -module  $\mathcal{L}(A^n; A)$ .

*Proof.* According to the theorems 3.5, 5.6, we can represent  $n$ -linear mapping as sum of terms (5.1), where  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , are generators of representation (3.3). Let us write the term  $s$  of the expression (5.5) as

$$(5.7) \quad b_1 \sigma(I_{1 \cdot s} \circ x_1) c_1 b_2 \dots c_{n-1} b_n \sigma(I_{n \cdot s} \circ x_n) c_n$$

where

$$b_1 = f_{s \cdot 0}^n \quad b_2 = \dots = b_n = e \quad c_1 = f_{s \cdot 1}^n \quad \dots \quad c_n = f_{s \cdot n}^n$$

Let us assume

$$f_i = \sigma^{-1}(b_i) I_{i \cdot s} \sigma^{-1}(c_i) \quad i = 1, \dots, n$$

in equation (5.7). Therefore, according to theorem 5.3, mapping (5.6) is transformation of module  $\mathcal{L}(A^n; A)$ . For a given tensor  $c \in A^{\otimes n+1}$  and given transposition  $\sigma \in S_n$ , a transformation  $h(c, \sigma)$  is a linear transformation of module  $\mathcal{L}(A^n; A)$  according to the theorem 5.5. According to the theorem 5.3, mapping (5.6) is linear mapping. According to the definition [3]-2.1.4 mapping (5.6) is a representation of the algebra  $A^{\otimes n+1} \times S^n$  in the module  $\mathcal{L}(A^n; A)$ .  $\square$

**Theorem 5.9.** Consider  $D$ -algebra  $A$ . A representation

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow {}^* \mathcal{L}(A^n; A)$$

of algebra  $A^{\otimes n+1}$  in module  $\mathcal{L}(A^n; A)$  defined by the equation (5.6) allows us to identify tensor  $d \in A^{\otimes n+1}$  and transposition  $\sigma \in S^n$  with mapping

$$(5.8) \quad (d, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) \quad f_i = \delta \in \mathcal{L}(A; A)$$

where  $\delta \in \mathcal{L}(A; A)$  is identity mapping.

*Proof.* If we assume  $f_i = \delta$ ,  $d = a_0 \otimes \dots \otimes a_n$  in the equation (5.2), then the equation (5.2) gets form

$$(5.9) \quad ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta, \dots, \delta)) \circ (x_1, \dots, x_n) = a_0 (\delta \circ x_1) \dots (\delta \circ x_n) a_n \\ = a_0 x_1 \dots x_n a_n$$

If we assume

$$(5.10) \quad ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta, \dots, \delta)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ = (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta \circ x_1, \dots, \delta \circ x_n) \\ = (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (x_1, \dots, x_n)$$

then comparison of equations (5.9) and (5.10) gives a basis to identify the action of the tensor  $d = a_0 \otimes \dots \otimes a_n$  and transposition  $\sigma \in S^n$  with mapping (5.8).  $\square$

Instead of notation  $(a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma)$ , we also use notation

$$a_0 \otimes_{\sigma(1)} \dots \otimes_{\sigma(n)} a_n$$

when we want to show order of arguments in expression. For instance, the following expressions are equivalent

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3, (2, 1, 3)) \circ (x_1, x_2, x_3) = a_0 x_2 a_1 x_1 a_2 x_3 a_3 \\ (a_0 \otimes_2 a_1 \otimes_1 a_2 \otimes_3 a_3) \circ (x_1, x_2, x_3) = a_0 x_2 a_1 x_1 a_2 x_3 a_3$$

---

<sup>6</sup>See the definition of representation of  $\Omega$ -algebra in the definition [3]-2.1.4.

## 6. POLYLINEAR MAP INTO FREE FINITE DIMENSIONAL ASSOCIATIVE ALGEBRA

**Theorem 6.1.** *Let  $A$  be free finite dimensional associative algebra over the ring  $D$ . Let  $\bar{I}$  be basis of algebra  $\mathcal{L}(A; A)$ . Let  $\bar{e}$  be the basis of the algebra  $A$  over the ring  $D$ . Standard representation of polylinear mapping into associative algebra has form*

$$(6.1) \quad f \circ (a_1, \dots, a_n) = f_{t, k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(I_{k_1} \circ a_1) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(I_{k_n} \circ a_n) \bar{e}_{i_n}$$

Index  $t$  enumerates every possible transpositions  $\sigma_t$  of the set of variables  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Expression  $f_{t, k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n}$  in equation (6.1) is called **standard component of polylinear mapping  $f$** .

*Proof.* We change index  $s$  in the equation (5.5) so as to group the terms with the same set of generators  $I_k$ . Expression (5.5) gets form

$$(6.2) \quad a = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^n \sigma_s(I_{k_1 \cdot s} \circ a_1) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 1}^n \dots \sigma_s(I_{k_n \cdot s} \circ a_n) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^n$$

We assume that the index  $s$  takes values depending on  $k_1, \dots, k_n$ . Components of polylinear map  $f$  have expansion

$$(6.3) \quad f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot p}^n = \bar{e}_i f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot p}^{n i}$$

relative to basis  $\bar{e}$ . If we substitute (6.3) into (5.5), we get

$$(6.4) \quad a = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^{n j_1} \bar{e}_{j_1} \sigma_s(I_{k_1} \circ a_1) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 1}^{n j_2} \bar{e}_{j_2} \dots \sigma_s(I_{k_n} \circ a_n) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^{n j_n} \bar{e}_{j_n}$$

Let us consider expression

$$(6.5) \quad f_{t, k_1 \dots k_n}^{j_0 \dots j_n} = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^{n j_1} \dots f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^{n j_n}$$

The right-hand side is supposed to be the sum of the terms with the index  $s$ , for which the transposition  $\sigma_s$  is the same. Each such sum has a unique index  $t$ . If we substitute expression (6.5) into equation (6.4) we get equation (6.1).  $\square$

**Theorem 6.2.** *Let  $A$  be free finite dimensional associative algebra over the ring  $D$ . Let  $\bar{e}$  be the basis of the algebra  $A$  over the ring  $D$ . Polylinear map (5.4) can be represented as  $D$ -valued form of degree  $n$  over ring  $D$ <sup>7</sup>*

$$(6.6) \quad f(a_1, \dots, a_n) = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n}$$

where

$$(6.7) \quad \begin{aligned} a_j &= \bar{e}_i a_j^i \\ f_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n}) \end{aligned}$$

and values  $f_{i_1 \dots i_n}$  are coordinates of  $D$ -valued covariant tensor.

*Proof.* According to the definition 1.4, the equation (6.6) follows from the chain of equations

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (\bar{e}_{i_1} a_1^{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n} a_n^{i_n}) = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f \circ (\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n})$$

Let  $\bar{e}'$  be another basis. Let

$$(6.8) \quad \bar{e}'_i = \bar{e}_j h_i^j$$

<sup>7</sup>We proved the theorem by analogy with theorem in [2], p. 107, 108

be transformation, mapping basis  $\bar{e}$  into basis  $\bar{e}'$ . From equations (6.8) and (6.7) it follows

$$\begin{aligned}
 f'_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (\bar{e}'_{i_1}, \dots, \bar{e}'_{i_n}) \\
 &= f \circ (\bar{e}_{j_1} h_{i_1}^{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_n} h_{i_n}^{j_n}) \\
 &= h_{i_1}^{j_1} \dots h_{i_n}^{j_n} f \circ (\bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_n}) \\
 &= h_{i_1}^{j_1} \dots h_{i_n}^{j_n} f_{j_1 \dots j_n}
 \end{aligned}
 \tag{6.9}$$

From equation (6.9) the tensor law of transformation of coordinates of polylinear map follows. From equation (6.9) and theorem [4]-2.1.4 it follows that value of the mapping  $f \circ (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$  does not depend from choice of basis.  $\square$

Polylinear mapping (5.4) is **symmetric**, if

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))$$

for any transposition  $\sigma$  of set  $\{a_1, \dots, a_n\}$ .

**Theorem 6.3.** *If polyadditive map  $f$  is symmetric, then*

$$f_{i_1, \dots, i_n} = f_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n)} \tag{6.10}$$

*Proof.* Equation (6.10) follows from equation

$$\begin{aligned}
 a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (a_1, \dots, a_n) \\
 &= f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \\
 &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n)}
 \end{aligned}$$

$\square$

Polylinear mapping (5.4) is **skew symmetric**, if

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = |\sigma| f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))$$

for any transposition  $\sigma$  of set  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Here

$$|\sigma| = \begin{cases} 1 & \text{transposition } \sigma \text{ even} \\ -1 & \text{transposition } \sigma \text{ odd} \end{cases}$$

**Theorem 6.4.** *If polylinear map  $f$  is skew symmetric, then*

$$f_{i_1, \dots, i_n} = |\sigma| f_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n)} \tag{6.11}$$

*Proof.* Equation (6.11) follows from equation

$$\begin{aligned}
 a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (a_1, \dots, a_n) \\
 &= |\sigma| f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \\
 &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} |\sigma| f_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n)}
 \end{aligned}$$

$\square$

**Theorem 6.5.** *Let  $A$  be free finite dimensional associative algebra over the ring  $D$ . Let  $\bar{I}$  be basis of algebra  $\mathcal{L}(A; A)$ . Let  $\bar{e}$  be the basis of the algebra  $A$  over the ring  $D$ . Let polylinear over ring  $D$  mapping  $f$  be generated by set of mappings*



$(I_{k_1}, \dots, I_{k_n})$ . Coordinates of the mapping  $f$  and its components relative basis  $\bar{e}$  satisfy to the equation

$$(6.12) \quad f_{l_1 \dots l_n} = f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{k_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \dots B_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^{l_n} \bar{e}_{l_n}$$

$$(6.13) \quad f_{l_1 \dots l_n}^p = f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{k_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \dots C_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^p$$

*Proof.* In equation (6.1), we assume

$$I_{k_i} \circ a_i = \bar{e}_{j_i} I_{k_i \cdot l_i}^{j_i} a_i^{l_i}$$

Then equation (6.1) gets form

$$(6.14) \quad \begin{aligned} f \circ (a_1, \dots, a_n) &= f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(a_1^{l_1} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \bar{e}_{j_1}) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(a_n^{l_n} I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} \bar{e}_{j_n}) \bar{e}_{i_n} \\ &= a_1^{l_1} \dots a_n^{l_n} f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(\bar{e}_{j_1}) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(\bar{e}_{j_n}) \bar{e}_{i_n} \\ &= a_1^{l_1} \dots a_n^{l_n} f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{k_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \\ &\quad \dots C_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^{l_n} \bar{e}_{l_n} \end{aligned}$$

From equation (6.6) it follows that

$$(6.15) \quad f \circ (a_1, \dots, a_n) = \bar{e}_p f_{i_1 \dots i_n}^p a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$$

Equation (6.12) follows from comparison of equations (6.14) and (6.6). Equation (6.13) follows from comparison of equations (6.14) and (6.15).  $\square$

## 7. REFERENCES

- [1] Serge Lang, Algebra, Springer, 2002
- [2] P. K. Rashevsky, Riemann Geometry and Tensor Calculus, Moscow, Nauka, 1967
- [3] Aleks Kleyn, Representation of Universal Algebra, eprint [arXiv:0912.3315](https://arxiv.org/abs/0912.3315) (2009)
- [4] Aleks Kleyn, Linear Mappings of Free Algebra: First Steps in Noncommutative Linear Algebra, Lambert Academic Publishing, 2010

## 8. INDEX

- algebra over ring [1](#)
- basis of algebra  $\mathcal{L}(A; A)$  [9](#)
- component of polylinear map into  
    associative algebra [13](#)
- free algebra over ring [1](#)
- linear mapping of  $R$ -algebra  $A_1$  into  $R$ -  
    algebra  $A_2$  [2](#)
- polylinear mapping of algebras [2](#)
- skew symmetric polylinear mapping into  
    associative algebra [16](#)
- standard component of polylinear map  $f$  of  
    division ring [15](#)
- standard component of tensor in tensor  
    product of algebras [8](#)
- standard representation of polylinear  
    mapping into associative algebra [15](#)
- structural constants of algebra  $P$  over ring  
     $D$  [2](#)
- symmetric polylinear mapping into  
    associative algebra [16](#)
- tensor power of algebra [5](#)
- tensor product of algebras [5](#)

## 9. SPECIAL SYMBOLS AND NOTATIONS

$a^{i_1 \dots i_n}$  standard component of tensor in  
 tensor product of algebras **8**  
 $A^{\otimes n}$  tensor power of algebra  $A$  **5**  
 $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$  tensor product of algebras **5**

$C_{ij}^k$  structural constants of algebra  $A$  over  
 ring  $D$  **2**

$f_{s \cdot p}^n$  component of polylinear map into  
 associative algebra **13**

$f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n}$  standard component of  
 polylinear mapping into associative  
 algebra **15**

$\mathcal{L}(A_1; A_2)$  set of linear mappings of  
 algebra  $A_1$  into algebra  $A_2$  **2**

$\mathcal{L}(A^n; S)$  set of  $n$ -linear mappings of  
 algebra  $A$  into module  $S$  **2**

$\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; S)$  set of polylinear maps of  
 algebras  $A_1, \dots, A_n$  into module  $S$  **2**

# Полилинейное отображение свободной алгебры

Александр Клейн

Аннотация. В статье я рассматриваю структуру полилинейного отображения свободной алгебры над коммутативным кольцом.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Алгебра над кольцом . . . . .	1
2. Тензорное произведение алгебр . . . . .	5
3. Линейное отображение в ассоциативную алгебру . . . . .	8
4. Линейное отображение в неассоциативную алгебру . . . . .	10
5. Полилинейное отображение в ассоциативную алгебру . . . . .	10
6. Полилинейное отображение в свободную конечно мерную ассоциативную алгебру . . . . .	16
7. Список литературы . . . . .	18
8. Предметный указатель . . . . .	19
9. Специальные символы и обозначения . . . . .	20

## 1. АЛГЕБРА НАД КОЛЬЦОМ

**Определение 1.1.** Пусть  $D$  - коммутативное кольцо. Пусть  $A$  - модуль над кольцом  $D$ .<sup>1</sup> Для заданного билинейного отображения

$$f : A \times A \rightarrow A$$

мы определим произведение в  $A$

$$(1.1) \quad ab = f \circ (a, b)$$

$A$  - **алгебра над кольцом  $D$** , если  $A$  -  $D$ -модуль и в  $A$  определена операция произведения (1.1). Если  $A$  является свободным  $D$ -модулем, то  $A$  называется **свободной алгеброй над кольцом  $D$** .  $\square$

---

Aleks\_Kleyn@MailAPS.org.  
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>.  
[http://arxiv.org/a/kleyn\\_a\\_1](http://arxiv.org/a/kleyn_a_1).  
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>.

<sup>1</sup>Этот подраздел написан на основе раздела [4]-2.2.

Пусть  $\bar{e}$  - базис свободной алгебры  $A$  над кольцом  $D$ . Если алгебра  $A$  имеет единицу, положим  $\bar{e}_0$  - единица алгебры  $A$ .

**Теорема 1.2.** Пусть  $\bar{e}$  - базис свободной алгебры  $A$  над кольцом  $D$ . Пусть

$$a = a^i e_i \quad b = b^j e_j \quad a, b \in A$$

Произведение  $a, b$  можно получить согласно правилу

$$(1.2) \quad (ab)^k = C_{ij}^k a^i b^j$$

где  $C_{ij}^k$  - структурные константы алгебры  $A$  над кольцом  $D$ . Произведение базисных векторов в алгебре  $A$  определено согласно правилу

$$(1.3) \quad \bar{e}_i \bar{e}_j = C_{ij}^k \bar{e}_k$$

*Доказательство.* Равенство (1.3) является следствием утверждения, что  $\bar{e}$  является базисом алгебры  $A$ . Так как произведение в алгебре является билинейным отображением, то произведение  $a$  и  $b$  можно записать в виде

$$(1.4) \quad ab = a^i b^j e_i e_j$$

Из равенств (1.3), (1.4), следует

$$(1.5) \quad ab = a^i b^j C_{ij}^k \bar{e}_k$$

Так как  $\bar{e}$  является базисом алгебры  $A$ , то равенство (1.2) следует из равенства (1.5).  $\square$

**Определение 1.3.** Пусть  $A_1$  и  $A_2$  - алгебры над кольцом  $D$ . Линейное отображение<sup>2</sup>

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

$D$ -модуля  $A_1$  в  $D$ -модуль  $A_2$  называется **линейным отображением  $D$ -алгебры  $A_1$  в  $D$ -алгебру  $A_2$** . Обозначим  $\mathcal{L}(A_1; A_2)$  множество линейных отображений алгебры  $A_1$  в алгебру  $A_2$ .  $\square$

**Определение 1.4.** Пусть  $D$  - коммутативное ассоциативное кольцо. Пусть  $A_1, \dots, A_n$  -  $D$ -алгебры и  $S$  -  $D$ -модуль. Мы будем называть отображение

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

**полилинейным отображением алгебр  $A_1, \dots, A_n$  в модуль  $S$** , если

$$f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$1 \leq i \leq n \quad a_i, b_i \in A_i \quad p \in D$$

Обозначим  $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; S)$  множество полилинейных отображений алгебр  $A_1, \dots, A_n$  в модуль  $S$ . Обозначим  $\mathcal{L}(A^n; S)$  множество  $n$ -линейных отображений алгебры  $A$  ( $A_1 = \dots = A_n = A$ ) в модуль  $S$ .  $\square$

---

<sup>2</sup>Этот подраздел написан на основе раздела [4]-2.3.

**Теорема 1.5.** Пусть  $D$  - коммутативное ассоциативное кольцо. Пусть  $A_1, \dots, A_n$  -  $D$ -алгебры и  $S$  -  $D$ -модуль. Пусть отображения

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

$$g : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

являются полилинейными отображениями. Тогда отображение  $f + g$ , определённое равенством

$$(f + g) \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_n) + g \circ (a_1, \dots, a_n)$$

также является полилинейным.

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из цепочек равенств

$$\begin{aligned} & (f + g) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= f \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\ &+ g \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\ &= (f + g) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + (f + g) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\ & (f + g) \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) \\ &= f \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) \\ &= pf \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + pg \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &= p(f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \\ &= p(f + g) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

**Следствие 1.6.** Рассмотрим алгебру  $A_1$  и алгебру  $A_2$ . Пусть отображения

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

$$g : A_1 \rightarrow A_2$$

являются линейными отображениями. Тогда отображение  $f + g$ , определённое равенством

$$(f + g) \circ a = f \circ a + g \circ a$$

также является линейным.

□

**Теорема 1.7.** Пусть  $D$  - коммутативное ассоциативное кольцо. Пусть  $A_1, \dots, A_n$  -  $D$ -алгебры и  $S$  -  $D$ -модуль. Пусть отображение

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

является полилинейным отображением. Тогда отображение  $pf, p \in D$ , определённое равенством

$$(pf) \circ x = p f \circ x$$

также является полилинейным. При этом выполняется равенство

$$p(qf) = (pq)f$$

$$(p + q)f = pf + qf$$

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из цепочек равенств

$$\begin{aligned}
(pf) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) &= p \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\
&= p (f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)) \\
&= p f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + p f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\
&= (pf) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + (pf) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\
(pf) \circ (x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n) &= p \circ (x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n) = pq \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&= qp \circ (x_1, \dots, x_n) = q (pf) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
(p(qf)) \circ (x_1, \dots, x_n) &= p (qf) \circ (x_1, \dots, x_n) = p (q \circ (x_1, \dots, x_n)) \\
&= (pq) \circ (x_1, \dots, x_n) = ((pq)f) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
((p+q)f) \circ (x_1, \dots, x_n) &= (p+q) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= p \circ (x_1, \dots, x_n) + q \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= (pf) \circ (x_1, \dots, x_n) + (qf) \circ (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

□

**Следствие 1.8.** Рассмотрим алгебру  $A_1$  и алгебру  $A_2$ . Пусть отображение

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

является линейным отображением. Тогда отображение  $pf$ ,  $p \in D$ , определённое равенством

$$(pf) \circ x = p \circ f \circ x$$

также является линейным. При этом выполняется равенство

$$\begin{aligned}
p(qf) &= (pq)f \\
(p+q)f &= pf + qf
\end{aligned}$$

□

**Теорема 1.9.** Пусть  $D$  - коммутативное ассоциативное кольцо. Пусть  $A_1, \dots, A_n$  -  $D$ -алгебры и  $S$  -  $D$ -модуль. Множество  $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; S)$  является  $D$ -модулем.

*Доказательство.* Теорема 1.5 определяет сумму полилинейных отображений в  $D$ -модуль  $S$ . Пусть  $f, g, h \in \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; S)$ . Для любого  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$ ,

$$\begin{aligned}
(f+g) \circ a &= f \circ a + g \circ a = g \circ a + f \circ a \\
&= (g+f) \circ a \\
((f+g)+h) \circ a &= (f+g) \circ a + h \circ a = (f \circ a + g \circ a) + h \circ a \\
&= f \circ a + (g \circ a + h \circ a) = f \circ a + (g+h) \circ a \\
&= (f+(g+h)) \circ a
\end{aligned}$$

Следовательно, сумма полилинейных отображений коммутативна и ассоциативна.

Отображение  $z$ , определённое равенством

$$z \circ a = 0$$

является нулём операции сложения, так как

$$(z+f) \circ a = z \circ a + f \circ a = 0 + f \circ a = f \circ a$$

Для заданного отображения  $f$  отображение  $g$ , определённое равенством

$$g \circ a = -f \circ a$$

удовлетворяет равенству

$$f + g = z$$

так как

$$(f + g) \circ a = f \circ a + g \circ a = f \circ a - f \circ a = 0$$

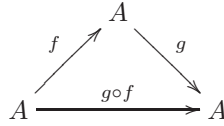
Следовательно, множество  $\mathcal{L}(A_1; A_2)$  является абелевой группой.

Из теоремы 1.7 следует, что определено представление кольца  $D$  в абелевой группе  $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; S)$ . Так как кольцо  $D$  имеет единицу, то согласно теореме [4]-2.1.1 указанное представление эффективно.  $\square$

**Следствие 1.10.** Пусть  $D$  - коммутативное кольцо с единицей. Рассмотрим  $D$ -алгебру  $A_1$  и  $D$ -алгебру  $A_2$ . Множество  $\mathcal{L}(A_1; A_2)$  является  $D$ -модулем.  $\square$

**Теорема 1.11.** Пусть  $A$  - алгебра над коммутативным кольцом  $D$ . Модуль  $\mathcal{L}(A; A)$ , оснащённый произведением

$$(1.6) \quad \circ : (g, f) \in \mathcal{L}(A; A) \times \mathcal{L}(A; A) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(A; A)$$



является алгеброй над  $D$ .

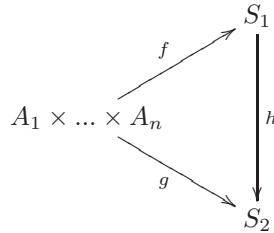
*Доказательство.* Смотри доказательство теоремы [4]-2.4.5.  $\square$

## 2. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ АЛГЕБР

**Определение 2.1.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  - свободные алгебры над коммутативным кольцом  $D$ .<sup>3</sup> Рассмотрим категорию  $\mathcal{A}$  объектами которой являются полилинейные над коммутативным кольцом  $D$  отображения

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow S_1 \quad g : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow S_2$$

где  $S_1, S_2$  - модули над кольцом  $D$ . Мы определим морфизм  $f \rightarrow g$  как линейное над коммутативным кольцом  $D$  отображение  $h : S_1 \rightarrow S_2$ , для которого коммутативна диаграмма



Универсальный объект  $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$  категории  $\mathcal{A}$  называется **тензорным произведением алгебр**  $A_1, \dots, A_n$ .  $\square$

<sup>3</sup>Я определяю тензорное произведение алгебр по аналогии с определением в [1], с. 456 - 458. Этот подраздел написан на основе раздела [4]-2.5.



**Определение 2.2.** Тензорное произведение

$$A^{\otimes n} = A_1 \otimes \dots \otimes A_n \quad A_1 = \dots = A_n = A$$

называется **тензорной степенью алгебры  $A$** . □

**Теорема 2.3.** Тензорное произведение алгебр существует.

*Доказательство.* Пусть  $M$  - модуль над кольцом  $D$ , порождённый произведением  $A_1 \times \dots \times A_n$  алгебр  $A_1, \dots, A_n$ . Инъекция

$$i : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow M$$

определена по правилу

$$(2.1) \quad i \circ (d_1, \dots, d_n) = (d_1, \dots, d_n)$$

Пусть  $N \subset M$  - подмодуль, порождённый элементами вида

$$(2.2) \quad (d_1, \dots, d_i + c_i, \dots, d_n) - (d_1, \dots, d_i, \dots, d_n) - (d_1, \dots, c_i, \dots, d_n)$$

$$(2.3) \quad (d_1, \dots, ad_i, \dots, d_n) - a(d_1, \dots, d_i, \dots, d_n)$$

где  $d_i \in A_i$ ,  $c_i \in A_i$ ,  $a \in D$ . Пусть

$$j : M \rightarrow M/N$$

каноническое отображение на фактормодуль. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccc} & & M/N \\ & \nearrow f & \\ A_1 \times \dots \times A_n & \xrightarrow{i} & M \end{array}$$

Поскольку элементы (2.2) и (2.3) принадлежат ядру линейного отображения  $j$ , то из равенства (2.1) следует

$$(2.5) \quad f \circ (d_1, \dots, d_i + c_i, \dots, d_n) = f \circ (d_1, \dots, d_i, \dots, d_n) + f \circ (d_1, \dots, c_i, \dots, d_n)$$

$$(2.6) \quad f \circ (d_1, \dots, ad_i, \dots, d_n) = a f \circ (d_1, \dots, d_i, \dots, d_n)$$

Из равенств (2.5) и (2.6) следует, что отображение  $f$  полилинейно над кольцом  $D$ . Поскольку  $M$  - модуль с базисом  $A_1 \times \dots \times A_n$ , то, согласно теореме [1]-1 на с. 104, для любого модуля  $V$  и любого полилинейного над  $D$  отображения

$$g : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow V$$

существует единственный гомоморфизм  $k : M \rightarrow V$ , для которого коммутативна следующая диаграмма

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccc} A_1 \times \dots \times A_n & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow g & \downarrow k \\ & & V \end{array}$$

Так как  $g$  - полилинейно над  $D$ , то  $\ker k \subseteq N$ . Согласно утверждению на с. [1]-94, отображение  $j$  универсально в категории гомоморфизмов векторного пространства  $M$ , ядро которых содержит  $N$ . Следовательно, определён гомоморфизм

$$h : M/N \rightarrow V$$

для которого коммутативна диаграмма

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccc} & & M/N \\ & \nearrow j & \downarrow h \\ M & & \\ & \searrow k & \\ & & V \end{array}$$

Объединяя диаграммы (2.4), (2.7), (2.8), получим коммутативную диаграмму

$$(2.9) \quad \begin{array}{ccccc} & & & & M/N \\ & & & \nearrow f & \downarrow h \\ & & & M & \\ & \nearrow i & & \searrow k & \\ A_1 \times \dots \times A_n & \xrightarrow{i} & M & & \\ & \searrow g & & \searrow k & \\ & & & & V \end{array}$$

Так как  $\text{Im} f$  порождает  $M/N$ , то отображение  $h$  однозначно определено.  $\square$

Согласно доказательству теоремы 2.3

$$A_1 \otimes \dots \otimes A_n = M/N$$

Для  $d_i \in A_i$  будем записывать

$$(2.10) \quad j \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

**Теорема 2.4.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  - алгебры над коммутативным кольцом  $D$ . Пусть

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

полилинейное отображение, определённое равенством

$$(2.11) \quad f \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

Пусть

$$g : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow V$$

полилинейное отображение в  $D$ -модуль  $V$ . Существует  $D$ -линейное отображение

$$h : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \rightarrow V$$

такое, что диаграмма

$$(2.12) \quad \begin{array}{ccc} & & A_1 \otimes \dots \otimes A_n \\ & \nearrow f & \downarrow h \\ A_1 \times \dots \times A_n & & \\ & \searrow g & \\ & & V \end{array}$$

коммутативна.

*Доказательство.* Равенство (2.11) следует из равенств (2.1) и (2.10). Существование отображения  $h$  следует из определения 2.1 и построений, выполненных при доказательстве теоремы 2.3.  $\square$

Равенства (2.5) и (2.6) можно записать в виде

$$(2.13) \quad \begin{aligned} & a_1 \otimes \dots \otimes (a_i + b_i) \otimes \dots \otimes a_n \\ &= a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n + a_1 \otimes \dots \otimes b_i \otimes \dots \otimes a_n \end{aligned}$$

$$(2.14) \quad \begin{aligned} & a_1 \otimes \dots \otimes (ca_i) \otimes \dots \otimes a_n = c(a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n) \\ & a_i \in A_i \quad b_i \in A_i \quad c \in D \end{aligned}$$

**Теорема 2.5.** Пусть  $A$  - алгебра над коммутативным кольцом  $D$ . Существует линейное отображение

$$h : a \otimes b \in A \otimes A \rightarrow ab \in A$$

*Доказательство.* Теорема является следствием теоремы 2.4 и определения 1.1.  $\square$

**Теорема 2.6.** Тензорное произведение  $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$  свободных конечномерных алгебр  $A_1, \dots, A_n$  над коммутативным кольцом  $D$  является свободной конечномерной алгеброй.

Пусть  $\bar{e}_i$  - базис алгебры  $A_i$  над кольцом  $D$ . Произвольный тензор  $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$  можно представить в виде

$$(2.15) \quad a = a^{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{n \cdot i_n}$$

Мы будем называть выражение  $a^{i_1 \dots i_n}$  **стандартной компонентой тензора**.

*Доказательство.* Смотри доказательство теоремы [4]-2.5.6.  $\square$

### 3. ЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В АССОЦИАТИВНУЮ АЛГЕБРУ

**Теорема 3.1.** Рассмотрим  $D$ -алгебры  $A_1$  и  $A_2$ . Для заданного отображения  $f \in \mathcal{L}(A_1; A_2)$  существует линейное отображение

$$h : A_2 \otimes A_2 \rightarrow \mathcal{L}(A_1; A_2)$$

определённое равенством

$$(3.1) \quad (a \otimes b) \circ f = afb$$

*Доказательство.* Смотри доказательство теорем [4]-2.6.1 и [4]-2.6.2.  $\square$

**Теорема 3.2.** Рассмотрим  $D$ -алгебры  $A_1$  и  $A_2$ . Определим произведение в алгебре  $A_2 \otimes A_2$  согласно правилу

$$(3.2) \quad (c \otimes d) \circ (a \otimes b) = (ca) \otimes (bd)$$

Линейное отображение

$$(3.3) \quad h : A_2 \otimes A_2 \rightarrow {}^*\mathcal{L}(A_1; A_2)$$

определённое равенством

$$(3.4) \quad (a \otimes b) \circ f = afb \quad a, b \in A_2 \quad f \in \mathcal{L}(A_1; A_2)$$

является представлением<sup>4</sup> алгебры  $A_2 \otimes A_2$  в модуле  $\mathcal{L}(A_1; A_2)$ .

*Доказательство.* Смотри доказательство теоремы [4]-2.6.3  $\square$

**Теорема 3.3.** Рассмотрим  $D$ -алгебру  $A$ . Определим произведение в алгебре  $A \otimes A$  согласно правилу (3.2). Представление

$$(3.5) \quad h : A \otimes A \rightarrow {}^*\mathcal{L}(A; A)$$

алгебры  $A \otimes A$  в модуле  $\mathcal{L}(A; A)$ , определённое равенством

$$(3.6) \quad (a \otimes b) \circ f = a f b \quad a, b \in A \quad f \in \mathcal{L}(A; A)$$

позволяет отождествить тензор  $d \in A \otimes A$  с отображением  $d \circ \delta \in \mathcal{L}(A; A)$ , где  $\delta \in \mathcal{L}(A; A)$  - тождественное отображение.

*Доказательство.* Смотри доказательство теоремы [4]-2.6.4  $\square$

Из теоремы 3.3 следует, что отображение (3.4) можно рассматривать как произведение отображений  $a \otimes b$  и  $f$ .

**Теорема 3.4.** Рассмотрим  $D$ -алгебру  $A_1$  и ассоциативную  $D$ -алгебру  $A_2$ . Рассмотрим представление алгебры  $A_2 \otimes A_2$  в модуле  $\mathcal{L}(A_1; A_2)$ . Отображение

$$h : A_1 \rightarrow A_2$$

порождённое отображением

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

имеет вид

$$(3.7) \quad h = (a_{s,0} \otimes a_{s,1}) \circ f = a_{s,0} f a_{s,1}$$

*Доказательство.* Смотри доказательство теоремы [4]-2.6.6  $\square$

**Теорема 3.5.** Пусть  $A$  - свободная конечно мерная ассоциативная алгебра над полем  $D$ . Представление алгебры  $A \otimes A$  в алгебре  $\mathcal{L}(A; A)$  имеет конечный базис  $\bar{I}$ .

(1) Линейное отображение  $f \in \mathcal{L}(A; A)$  имеет вид

$$(3.8) \quad f = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} \otimes a_{k \cdot s_k \cdot 1}) \circ I_k = \sum_{\mathbf{k}} a_{k \cdot s_k \cdot 0} I_k a_{k \cdot s_k \cdot 1}$$

(2) Его стандартное представление имеет вид

$$(3.9) \quad f = a^{k \cdot \mathbf{ij}} (\bar{e}_{\mathbf{i}} \otimes \bar{e}_{\mathbf{j}}) \circ I_k = a^{k \cdot \mathbf{ij}} \bar{e}_{\mathbf{i}} I_k \bar{e}_{\mathbf{j}}$$

*Доказательство.* Смотри доказательство теоремы [4]-2.7.5  $\square$

---

<sup>4</sup>Определение представления  $\Omega$ -алгебры дано в определении [3]-2.1.4.

#### 4. ЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В НЕАССОЦИАТИВНУЮ АЛГЕБРУ

Так как произведение неассоциативно, мы можем предположить, что действие  $a, b \in A$  на отображение  $f$  может быть представлено либо в виде  $a(fb)$ , либо в виде  $(af)b$ .

**Теорема 4.1.** Пусть  $\bar{e}_1$  - базис свободной конечно мерной  $D$ -алгебры  $A_1$ . Пусть  $\bar{e}_2$  - базис свободной конечно мерной неассоциативной  $D$ -алгебры  $A_2$ . Пусть  $C_{2 \cdot \textcolor{red}{p}}^{\textcolor{red}{p}} - \textcolor{red}{kl}$  - структурные константы алгебры  $A_2$ . Пусть отображение

$$(4.1) \quad g = a \circ f$$

порождённое отображением  $f \in (A_1; A_2)$  посредством тензора  $a \in A_2 \otimes A_2$ , имеет стандартное представление

$$(4.2) \quad g = a^{\textcolor{red}{ij}}(\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \circ f = a^{\textcolor{red}{ij}}(\bar{e}_i f) \bar{e}_j$$

Координаты отображения (4.1) и его стандартные компоненты связаны равенством

$$(4.3) \quad g_l^k = f_l^m g^{\textcolor{red}{ij}} C_{2 \cdot \textcolor{red}{im}}^{\textcolor{red}{p}} C_{2 \cdot \textcolor{red}{pj}}^{\textcolor{red}{k}}$$

*Доказательство.* Смотри доказательство теоремы [4]-2.8.3 □

**Теорема 4.2.** Пусть  $A$  - свободная конечно мерная неассоциативная алгебра над кольцом  $D$ . Представление алгебры  $A \otimes A$  в алгебре  $\mathcal{L}(A; A)$  имеет конечный базис  $\bar{I}$ .

(1) Линейное отображение  $f \in \mathcal{L}(A; A)$  имеет вид

$$(4.4) \quad f = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} \otimes a_{k \cdot s_k \cdot 1}) \circ I_k = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} I_k) a_{k \cdot s_k \cdot 1}$$

(2) Его стандартное представление имеет вид

$$(4.5) \quad f = a^{k \cdot \textcolor{red}{ij}}(\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \circ I_k = a^{k \cdot \textcolor{red}{ij}}(\bar{e}_i I_k) \bar{e}_j$$

*Доказательство.* Смотри доказательство теоремы [4]-2.8.4 □

#### 5. ПОЛИЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В АССОЦИАТИВНУЮ АЛГЕБРУ

**Теорема 5.1.** Пусть  $A_1, \dots, A_n, A$  - ассоциативные  $D$ -алгебры. Пусть

$$f_i \in \mathcal{L}(A_i; A) \quad i = 1, \dots, n$$

$$a_j \in A \quad j = 0, \dots, n$$

Для заданной перестановки  $\sigma$   $n$  переменных отображение

$$(5.1) \quad \begin{aligned} & ((a_0, \dots, a_n) \circ \sigma(f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \end{aligned}$$

является  $n$ -линейным отображением в алгебру  $A$ .

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из цепочек равенств

$$\begin{aligned}
& ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ (x_i + y_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i + f_i \circ y_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&+ a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ y_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&+ ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\
& \\
& ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ (px_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(p(f_i \circ x_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\
&= p(((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n))
\end{aligned}$$

□

В равенстве (5.1), также как и в других выражениях полилинейного отображения, принято соглашение, что отображение  $f_i$  имеет своим аргументом переменную  $x_i$ .

**Теорема 5.2.** Пусть  $A_1, \dots, A_n, A$  - ассоциативные  $D$ -алгебры. Для заданного семейства отображений

$$f_i \in \mathcal{L}(A_i; A) \quad i = 1, \dots, n$$

отображение

$$h : A^{n+1} \rightarrow \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$$

определённое равенством

$$(a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) = a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n$$

является  $n + 1$ -линейным отображением в  $D$ -модуль  $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$ .

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из цепочек равенств

$$\begin{aligned}
& ((a_0, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots (a_i + b_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n + a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots b_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= ((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&+ ((a_0, \dots, b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) + (a_0, \dots, b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
& \\
& ((a_0, \dots, pa_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots pa_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\
&= p(((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n)) \\
&= (p((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n))) \circ (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

□

**Теорема 5.3.** Пусть  $A_1, \dots, A_n, A$  - ассоциативные  $D$ -алгебры. Для заданного семейства отображений

$$f_i \in \mathcal{L}(A_i; A) \quad i = 1, \dots, n$$

существует линейное отображение

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$$

определённое равенством

$$(5.2) \quad \begin{aligned} (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) &= (a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n \end{aligned}$$

*Доказательство.* Утверждение теоремы является следствием теорем 2.4, 5.2.

□

**Теорема 5.4.** Пусть  $A_1, \dots, A_n, A$  - ассоциативные  $D$ -алгебры. Для заданного тензора  $a \in A^{\otimes n+1}$  и заданной перестановки  $\sigma \in S_n$  отображение

$$h : \prod_{i=1}^n \mathcal{L}(A_i; A) \rightarrow \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$$

определённое равенством

$$(a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) = a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n$$

является  $n$ -линейным отображением в  $D$ -модуль  $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$ .

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из цепочек равенств

$$\begin{aligned}
& ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i + g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(f_i + g_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma((f_i + g_i) \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i + g_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&+ a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(g_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(f_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&+ (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(g_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&+ ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \\
&+ (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, p f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(p f_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(p f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(p(f_i \circ x_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\
&= p(((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n)) \\
&= (p((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n))) \circ (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

□

**Теорема 5.5.** Пусть  $A_1, \dots, A_n, A$  - ассоциативные  $D$ -алгебры. Для заданного тензора  $a \in A^{\otimes n+1}$  и заданной перестановки  $\sigma \in S_n$  существует линейное отображение

$$h : \mathcal{L}(A_1; A) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}(A_n; A) \rightarrow \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; A)$$

определённое равенством

$$(5.3) \quad (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)$$

*Доказательство.* Утверждение теоремы является следствием теорем 2.4, 5.4.

□

**Теорема 5.6.** Пусть  $A$  - ассоциативная  $D$ -алгебра. Полилинейное отображение

$$(5.4) \quad f : A^n \rightarrow A, a = f \circ (a_1, \dots, a_n)$$

имеет вид

$$(5.5) \quad a = f_{s \cdot 0}^n \sigma_s(I_{1 \cdot s} \circ a_1) f_{s \cdot 1}^n \dots \sigma_s(I_{n \cdot s} \circ a_n) f_{s \cdot n}^n$$

где  $\sigma_s$  - перестановка множества переменных  $\{a_1, \dots, a_n\}$

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \sigma_s(a_1) & \dots & \sigma_s(a_n) \end{pmatrix}$$



*Доказательство.* Мы докажем утверждение индукцией по  $n$ .

При  $n = 1$  доказываемое утверждение является следствием утверждения (1) теоремы 3.5. При этом мы можем отождествить<sup>5</sup>

$$f_{s \cdot p}^1 = f_{s \cdot p} \quad p = 0, 1$$

Допустим, что утверждение теоремы справедливо при  $n = k - 1$ . Тогда отображение (5.4) можно представить в виде

$$\begin{array}{ccc} A^k & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow g \circ a_k & \uparrow h \\ & & A^{k-1} \end{array}$$

$$a = f \circ (a_1, \dots, a_k) = (g \circ a_k) \circ (a_1, \dots, a_{k-1})$$

Согласно предположению индукции полилинейное отображение  $h$  имеет вид

$$a = h_{t \cdot 0}^{k-1} \sigma_t(I_{1 \cdot t} \circ a_1) h_{t \cdot 1}^{k-1} \dots \sigma_t(I_{k-1 \cdot t} \circ a_{k-1}) h_{t \cdot k-1}^{k-1}$$

Согласно построению  $h = g \circ a_k$ . Следовательно, выражения  $h_{t \cdot p}$  являются функциями  $a_k$ . Поскольку  $g \circ a_k$  - линейная функция  $a_k$ , то только одно выражение  $h_{t \cdot p}$  является линейной функцией переменной  $a_k$ , и остальные выражения  $h_{t \cdot q}$  не зависят от  $a_k$ .

Не нарушая общности, положим  $p = 0$ . Согласно равенству (3.7) для заданного  $t$

$$h_{t \cdot 0}^{k-1} = g_{tr \cdot 0} I_{k \cdot r} \circ a_k g_{tr \cdot 1}$$

Положим  $s = tr$  и определим перестановку  $\sigma_s$  согласно правилу

$$\sigma_s = \sigma_{tr} = \begin{pmatrix} a_k & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ a_k & \sigma_t(a_1) & \dots & \sigma_t(a_{k-1}) \end{pmatrix}$$

Положим

$$\begin{aligned} f_{tr \cdot q+1}^k &= h_{t \cdot q}^{k-1} & q = 1, \dots, k-1 \\ f_{tr \cdot q}^k &= g_{tr \cdot q} & q = 0, 1 \end{aligned}$$

Мы доказали шаг индукции. □

**Определение 5.7.** Выражение  $f_{s \cdot p}^n$  в равенстве (5.5) называется **компонентой полилинейного отображения**  $f$ . □

**Теорема 5.8.** Рассмотрим  $D$ -алгебру  $A$ . Линейное отображение

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow {}^* \mathcal{L}(A^n; A)$$

<sup>5</sup>В представлении (5.5) мы будем пользоваться следующими правилами.

- Если область значений какого-либо индекса - это множество, состоящее из одного элемента, мы будем опускать соответствующий индекс.
- Если  $n = 1$ , то  $\sigma_s$  - тождественное преобразование. Это преобразование можно не указывать в выражении.

определённое равенством

$$(5.6) \quad (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n$$

$$a_0, \dots, a_n \in A \quad \sigma \in S_n \quad f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(A_n; A)$$

является представлением<sup>6</sup> алгебры  $A^{\otimes n+1} \times S^n$  в  $D$ -модуле  $\mathcal{L}(A^n; A)$ .

*Доказательство.* Согласно теоремам 3.5, 5.6,  $n$ -линейное отображение можно представить в виде суммы слагаемых (5.1), где  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , генераторы представления (3.3). Запишем слагаемое  $s$  выражения (5.5) в виде

$$(5.7) \quad b_1 \sigma(I_{1 \cdot s} \circ x_1) c_1 b_2 \dots c_{n-1} b_n \sigma(I_{n \cdot s} \circ x_n) c_n$$

где

$$b_1 = f_{s \cdot 0}^n \quad b_2 = \dots = b_n = e \quad c_1 = f_{s \cdot 1}^n \quad \dots \quad c_n = f_{s \cdot n}^n$$

Положим в равенстве (5.7)

$$f_i = \sigma^{-1}(b_i) I_{i \cdot s} \sigma^{-1}(c_i) \quad i = 1, \dots, n$$

Следовательно, согласно теореме 5.3, отображение (5.6) является преобразованием модуля  $\mathcal{L}(A^n; A)$ . Для данного тензора  $c \in A^{\otimes n+1}$  и заданной перестановки  $\sigma \in S_n$ , преобразование  $h(c, \sigma)$  является линейным преобразованием модуля  $\mathcal{L}(A^n; A)$  согласно теореме 5.5. Согласно теореме 5.3, отображение (5.6) является линейным отображением. Согласно определению [3]-2.1.4 отображение (5.6) является представлением алгебры  $A^{\otimes n+1} \times S^n$  в модуле  $\mathcal{L}(A^n; A)$ .  $\square$

**Теорема 5.9.** Рассмотрим  $D$ -алгебру  $A$ . Представление

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow {}^* \mathcal{L}(A^n; A)$$

алгебры  $A^{\otimes n+1}$  в модуле  $\mathcal{L}(A^n; A)$ , определённое равенством (5.6) позволяет отождествить тензор  $d \in A^{\otimes n+1}$  и перестановку  $\sigma \in S^n$  с отображением

$$(5.8) \quad (d, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) \quad f_i = \delta \in \mathcal{L}(A; A)$$

где  $\delta \in \mathcal{L}(A; A)$  - тождественное отображение.

*Доказательство.* Если в равенстве (5.2) мы положим  $f_i = \delta$ ,  $d = a_0 \otimes \dots \otimes a_n$ , то равенство (5.2) приобретает вид

$$(5.9) \quad ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta, \dots, \delta)) \circ (x_1, \dots, x_n) = a_0 (\delta \circ x_1) \dots (\delta \circ x_n) a_n$$

$$= a_0 x_1 \dots x_n a_n$$

Если мы положим

$$(5.10) \quad ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta, \dots, \delta)) \circ (x_1, \dots, x_n)$$

$$= (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta \circ x_1, \dots, \delta \circ x_n)$$

$$= (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (x_1, \dots, x_n)$$

то сравнение равенств (5.9) и (5.10) даёт основание отождествить действие тензора  $d = a_0 \otimes \dots \otimes a_n$  и перестановки  $\sigma \in S^n$  с отображением (5.8).  $\square$

<sup>6</sup>Определение представления  $\Omega$ -алгебры дано в определении [3]-2.1.4.

Вместо записи  $(a_0 \otimes \dots a_n, \sigma)$  мы также будем пользоваться записью

$$a_0 \otimes_{\sigma(1)} \dots \otimes_{\sigma(n)} a_n$$

если мы хотим явно указать какой аргумент становится на соответствующее место. Например, следующие выражения эквивалентны

$$\begin{aligned} (a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3, (2, 1, 3)) \circ (x_1, x_2, x_3) &= a_0 x_2 a_1 x_1 a_2 x_3 a_3 \\ (a_0 \otimes_2 a_1 \otimes_1 a_2 \otimes_3 a_3) \circ (x_1, x_2, x_3) &= a_0 x_2 a_1 x_1 a_2 x_3 a_3 \end{aligned}$$

## 6. ПОЛИЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В СВОБОДНУЮ КОНЕЧНО МЕРНУЮ АССОЦИАТИВНУЮ АЛГЕБРУ

**Теорема 6.1.** Пусть  $A$  - свободная конечно мерная ассоциативная алгебра над кольцом  $D$ . Пусть  $\bar{I}$  - базис алгебры  $\mathcal{L}(A; A)$ . Пусть  $\bar{e}$  - базис алгебры  $A$  над кольцом  $D$ . Стандартное представление полилинейного отображения в ассоциативную алгебру имеет вид

$$(6.1) \quad f \circ (a_1, \dots, a_n) = f_{t, k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(I_{k_1} \circ a_1) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(I_{k_n} \circ a_n) \bar{e}_{i_n}$$

Индекс  $t$  нумерует всевозможные перестановки  $\sigma_t$  множества переменных  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Выражение  $f_{t, k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n}$  в равенстве (6.1) называется **стандартной компонентой полилинейного отображения  $f$** .

*Доказательство.* Мы изменим индекс  $s$  в равенстве (5.5) таким образом, чтобы сгруппировать слагаемые с одинаковым набором генераторов  $I_k$ . Выражение (5.5) примет вид

$$(6.2) \quad a = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^n \sigma_s(I_{k_1} \circ a_1) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 1}^n \dots \sigma_s(I_{k_n} \circ a_n) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^n$$

Мы предполагаем, что индекс  $s$  принимает значения, зависящие от  $k_1, \dots, k_n$ . Компоненты полилинейного отображения  $f$  имеют разложение

$$(6.3) \quad f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot p}^n = \bar{e}_i f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot p}^{n, i}$$

относительно базиса  $\bar{e}$ . Если мы подставим (6.3) в (5.5), мы получим

$$(6.4) \quad a = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^{n, j_1} \bar{e}_{j_1} \sigma_s(I_{k_1} \circ a_1) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 1}^{n, j_2} \bar{e}_{j_2} \dots \sigma_s(I_{k_n} \circ a_n) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^{n, j_n} \bar{e}_{j_n}$$

Рассмотрим выражение

$$(6.5) \quad f_{t, k_1 \dots k_n}^{j_0 \dots j_n} = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^{n, j_1} \dots f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^{n, j_n}$$

В правой части подразумевается сумма тех слагаемых с индексом  $s$ , для которых перестановка  $\sigma_s$  совпадает. Каждая такая сумма будет иметь уникальный индекс  $t$ . Подставив в равенство (6.4) выражение (6.5) мы получим равенство (6.1).  $\square$

**Теорема 6.2.** Пусть  $A$  - свободная конечно мерная ассоциативная алгебра над кольцом  $D$ . Пусть  $\bar{e}$  - базис алгебры  $A$  над кольцом  $D$ . Полилинейное отображение (5.4) можно представить в виде  $D$ -значной формы степени  $n$  над кольцом  $D$ <sup>7</sup>

$$(6.6) \quad f(a_1, \dots, a_n) = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n}$$

<sup>7</sup>Теорема доказана по аналогии с теоремой в [2], с. 107, 108

где

$$(6.7) \quad \begin{aligned} a_j &= \bar{e}_i a_j^i \\ f_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n}) \end{aligned}$$

и величины  $f_{i_1 \dots i_n}$  являются координатами  $D$ -значного ковариантного тензора.

*Доказательство.* Согласно определению 1.4 равенство (6.6) следует из цепочки равенств

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (\bar{e}_{i_1} a_1^{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n} a_n^{i_n}) = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f \circ (\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n})$$

Пусть  $\bar{e}'$  - другой базис. Пусть

$$(6.8) \quad \bar{e}'_i = \bar{e}_j h_i^j$$

преобразование, отображающее базис  $\bar{e}$  в базис  $\bar{e}'$ . Из равенств (6.8) и (6.7) следует

$$(6.9) \quad \begin{aligned} f'_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (\bar{e}'_{i_1}, \dots, \bar{e}'_{i_n}) \\ &= f \circ (\bar{e}_{j_1} h_{i_1}^{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_n} h_{i_n}^{j_n}) \\ &= h_{i_1}^{j_1} \dots h_{i_n}^{j_n} f \circ (\bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_n}) \\ &= h_{i_1}^{j_1} \dots h_{i_n}^{j_n} f_{j_1 \dots j_n} \end{aligned}$$

Из равенства (6.9) следует тензорный закон преобразования координат полилинейного отображения. Из равенства (6.9) и теоремы [4]-2.1.4 следует, что значение отображения  $f \circ (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$  не зависит от выбора базиса.  $\square$

Полилинейное отображение (5.4) **симметрично**, если

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))$$

для любой перестановки  $\sigma$  множества  $\{a_1, \dots, a_n\}$ .

**Теорема 6.3.** Если полилинейное отображение  $f$  симметрично, то

$$(6.10) \quad f_{i_1, \dots, i_n} = f_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n)}$$

*Доказательство.* Равенство (6.10) следует из равенства

$$\begin{aligned} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \\ &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n)} \end{aligned}$$

$\square$

Полилинейное отображение (5.4) **косо симметрично**, если

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = |\sigma| f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))$$

для любой перестановки  $\sigma$  множества  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Здесь

$$|\sigma| = \begin{cases} 1 & \text{перестановка } \sigma \text{ чётная} \\ -1 & \text{перестановка } \sigma \text{ нечётная} \end{cases}$$

**Теорема 6.4.** Если полилинейное отображение  $f$  косо симметрично, то

$$(6.11) \quad f_{i_1, \dots, i_n} = |\sigma| f_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n)}$$

*Доказательство.* Равенство (6.11) следует из равенства

$$\begin{aligned} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= |\sigma| f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \\ &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} |\sigma| f_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n)} \end{aligned}$$

□

**Теорема 6.5.** Пусть  $A$  - свободная конечно мерная ассоциативная алгебра над кольцом  $D$ . Пусть  $\bar{I}$  - базис алгебры  $\mathcal{L}(A; A)$ . Пусть  $\bar{e}$  - базис алгебры  $A$  над кольцом  $D$ . Пусть полилинейное над кольцом  $D$  отображение  $f$  порождено набором отображений  $(I_{k_1}, \dots, I_{k_n})$ . Координаты отображения  $f$  и его компоненты относительно базиса  $\bar{e}$  удовлетворяют равенству

$$(6.12) \quad f_{l_1 \dots l_n} = f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{k_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \dots B_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^{l_n} \bar{e}_{l_n}$$

$$(6.13) \quad f_{l_1 \dots l_n}^p = f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{k_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \dots C_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^p$$

*Доказательство.* В равенстве (6.1) положим

$$I_{k_i} \circ a_i = \bar{e}_{j_i} I_{k_i \cdot l_i}^{j_i} a_i^{l_i}$$

Тогда равенство (6.1) примет вид

$$\begin{aligned} f \circ (a_1, \dots, a_n) &= f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(a_1^{l_1} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \bar{e}_{j_1}) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(a_n^{l_n} I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} \bar{e}_{j_n}) \bar{e}_{i_n} \\ &= a_1^{l_1} \dots a_n^{l_n} f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(\bar{e}_{j_1}) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(\bar{e}_{j_n}) \bar{e}_{i_n} \\ (6.14) \quad &= a_1^{l_1} \dots a_n^{l_n} f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{k_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \\ &\quad \dots C_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^{l_n} \bar{e}_{l_n} \end{aligned}$$

Из равенства (6.6) следует

$$(6.15) \quad f \circ (a_1, \dots, a_n) = \bar{e}_p f_{i_1 \dots i_n}^p a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$$

Равенство (6.12) следует из сравнения равенств (6.14) и (6.6). Равенство (6.13) следует из сравнения равенств (6.14) и (6.15). □

## 7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Серж Ленг, Алгебра, М. Мир, 1968
- [2] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М., Наука, 1967
- [3] Александр Клейн, Представление универсальной алгебры, eprint [arXiv:0912.3315](https://arxiv.org/abs/0912.3315) (2010)
- [4] Aleks Kleyn, Linear Mappings of Free Algebra: First Steps in Noncommutative Linear Algebra, Lambert Academic Publishing, 2010

## 8. ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

алгебра над кольцом **1**  
базис алгебры  $\mathcal{L}(A; A)$  **9**  
компонента полилинейного отображения  
ассоциативной алгебры **14**  
косо симметричное полилинейное  
отображение в ассоциативную  
алгебру **17**  
линейное отображение  $R$ -алгебры  $A_1$  в  
 $R$ -алгебру  $A_2$  **2**  
полилинейное отображение алгебр **2**  
свободная алгебра над кольцом **1**  
симметричное полилинейное  
отображение в ассоциативную  
алгебру **17**  
стандартная компонента полилинейного  
отображения  $f$  тела **16**  
стандартная компонента тензора в  
тензорном произведении алгебр **8**  
стандартное представление  
полилинейного отображения в  
ассоциативную алгебру **16**  
структурные константы алгебры  $P$  над  
кольцом  $D$  **2**  
тензорная степень алгебры  $A$  **6**  
тензорное произведение алгебр **5**

## 9. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

$a^{i_1 \dots i_n}$  стандартная компонента тензора  
в тензорном произведении алгебр **8**

$A^{\otimes n}$  тензорная степень алгебры  $A$  **6**  
 $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$  тензорное произведение  
алгебр **5**

$C_{ij}^k$  структурные константы алгебры  $A$   
над кольцом  $D$  **2**

$f_{s \cdot p}^n$  компонента полилинейного  
отображения ассоциативной алгебры  
**14**

$f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n}$  стандартная компонента  
полилинейного отображения в  
ассоциативную алгебру **16**

$\mathcal{L}(A_1; A_2)$  множество линейных  
отображений алгебры  $A_1$  в алгебру  
 $A_2$  **2**

$\mathcal{L}(A^n; S)$  множество  $n$ -линейных  
отображений алгебры  $A$  в модуль  $S$   
**2**

$\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n; S)$  множество  
полилинейных отображений алгебр  
 $A_1, \dots, A_n$  в модуль  $S$  **2**